Ukázka průběhu výpočtu Diskrétní Fourierovy transformace

Zadání: Spočítejte Fourierův obraz vektoru

$$(1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1)$$

Před začátkem:

- Pro $n = 8$ potřebujeme nějakou n-tou primitivní odmocninu z jedničky. Primitivní je taková, která pro žádné $0 < i < n$ ještě není jedničkou.

  Pokud si vzpomeneme na goniometrický tvar komplexních čísel, tak každé komplexní číslo se dá vyjádřit jako $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Pokud násobíme komplexní čísla v tomto tvaru, tak jen násobíme jejich velikosti a sčítáme úhly.
- Protože odmocňujeme jedničku, tak velikost čísla bude jednička a můžeme se ji zbavit. Pak jen potřebujeme počáteční $\varphi = \frac{\pi}{4}$, protože umocnění na osmou nám dá přesně $8\varphi = 2\pi$ a to je oběhnutí celé jednotkové kružnice zpět na jedničku. Tedy $\overline{\omega} = (\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.
- Při výpočtu obrazu počítáme podle vzorců níže, kde ω je nějaká mocnina $\overline{\omega}$ pro aktuální úroveň:

$$y_i = s_i + \omega^i l_i$$
$$y_{i+\frac{n}{2}} = s_i - \omega^i l_i$$

- Připomeňme si také tabulku sin a cos:

Funkce	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\dots$
$\sin\varphi$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\dots$
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\dots$

Průběh FFT:

1. Rouzdělíme si vstup rekurzivně na úrovně, v každé úrovni dáváme do jedné poloviny sudé a do druhé liché prvky:

$$(1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1)$$
$$(1, -1, 1, -1)(1, -1, 1, -1)$$
$$(1, 1)(-1, -1)(1, 1)(-1, -1)$$
$$(1)(1)(-1)(-1)(1)(1)(-1)(-1)$$

2. Rekurzivně počítáme, nejnižší úroveň vrací sebe sama a tedy návrat poslední úrovně dopadne takto (jen pro pořádek zde počítáme s $n = 1, \omega = \overline{\omega}^8 = 1$).

$$(1)(1)(-1)(-1)(1)(1)(-1)(-1)$$

3. Výpočet předposlední úrovně počítá s $n = 2, \omega = \overline{\omega}^4 = (\cos\pi + i\sin\pi) = -1$. Při výpočtu FFT počítáme s $\omega^0 = 1$ a dostaneme tedy:

$$(2, 0)(-2, 0)(2, 0)(-2, 0)$$

4. Výpočet druhé úrovně s $n = 4, \omega = \overline{\omega}^2 = (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = i$. Při výpočtu FFT počítáme popořadě s $\omega^0 = 1$ ($y_0 = s_0 + l_0$ a $y_2 = s_0 - l_0$) a s $\omega^1 = i$ ($y_1 = s_1 + il_1$, $y_3 = y_1 = s_1 - il_1$). Výpočet dopadne takto:

$$(0, 0, 4, 0)(0, 0, 4, 0)$$

5. Poslední úroveň počítáme s $n = 8, \omega = \overline{\omega}$. Při výpočtu FFT počítáme popořadě s $\omega^0 = 1$ (y_0 a y_4), $\omega^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ (y_1 a y_5), $\omega^2 = i$ (y_2 a y_6) a $\omega^3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ (y_3 a y_7). Většina členů jsou ale nuly a tak výpočet dopadne jednoduše:

$$(0, 0, 4i - 4, 0, 0, 0, 4i + 4, 0)$$

A to je vše, jen trochu pracné, ale nikterak složité :-)